



TITLE:

$H^{\infty}(m)$  の  $w^*$  Maximality について (Function Algebra)

AUTHOR(S):

貴志, 一男

---

CITATION:

貴志, 一男.  $H^{\infty}(m)$  の  $w^*$  Maximality について (Function Algebra). 数理解析研究所講究録 1972, 169: 145-156

ISSUE DATE:

1972-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106994>

RIGHT:

$H^\infty(m)$  の  $w^*$  maximality に ついて

和歌山人 教育 貴志 一男

## §1. 序

$A$  を compact Hausdorff space  $X$  上の uniform algebra,  $\mathcal{M}(A)$  を  $A$  の maximal ideal space とする. 又  $m \in \mathcal{M}(A)$  の表現測度は unique (これをまた  $m$  で表わす),  $m$  を含む Gleason part  $P(m)$  は nontrivial ( $P(m) \neq \{m\}$ ) であるとする. また  $A$  の  $L^\infty(m)$   $w^*$  closure を  $H^\infty(m)$  で表わす.

§3 では  $H^\infty(m)$  が  $L^\infty(m)$  の  $w^*$  closed subalgebra として maximal であるときの  $H^\infty(m)$ ,  $\mathcal{M}(H^\infty(m))$  の二, 三の性質 (定理 A, B), §4 では  $H^\infty(m)$  が  $L^\infty(m)$  の  $w^*$  closed subalgebra として maximal である条件 (定理 C. 特に,  $H^\infty(m)$  が  $L^\infty(m)$  の  $w^*$  closed subalgebra として maximal である必要十分条件は  $f \in H^\infty(m)$ ,  $f \neq 0$  のときは  $\int \log |f| d\mu > -\infty$  である) を述べる.

## §2. 準備

$X$  を compact Hausdorff space,  $A$  を  $X$  上の uniform algebra,  $M(A)$  を  $A$  の maximal ideal space とする.  $m \in M(A)$  の表現測度は unique (これをまた  $m$  で表わす),  $A$  の  $L^p(m)$  norm closure ( $p=\infty$  のときは  $w^*$  closure) を  $H^p(m)$  と書く.  $H^\infty(m)$  の Gelfand 表現  $\hat{H}^\infty$  を  $L^\infty(m)$  の maximal ideal space  $\tilde{X}$  上に制限したとき, これを  $\tilde{H}^\infty$  で表わす.  $\tilde{H}^\infty$  は  $\tilde{X}$  上の logmodular algebra である. すなわち  $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$  または  $C_R(\tilde{X}) = \log |(\tilde{H}^\infty)^{-1}|$  である.

$f \in H^p(m)$ ,  $\int \log |f| dm = \log |\int f dm| > -\infty$  なる関数を outer,  $f \in H^p(m)$ ,  $|f|=1$  a.e.  $(m)$  なる関数を inner という. 以下では,  $m$  を含む Gleason part  $P = P(m)$  は

$$P(m) \cong \{m\}$$

とする.  $\varphi \in P(m)$  の表現測度も unique であるのでこれを  $d\varphi$  で示すことにする.

$m \in M(H^\infty(m))$  を含む Gleason part  $P$  は  $f_0 = f_0(m)$  と示すと  $f_0$  は nontrivial である.  $\tilde{m}(\tilde{f}) = \int \tilde{f} d\tilde{m}$  ( $\tilde{f} \in H^\infty(m)$ ) におけると  $\tilde{m} \in M(\tilde{H}^\infty)$  である.  $\tilde{m}$  を表現する測度が一意に定まる. これをまた  $\tilde{m}$  で示す. すなわち  $\tilde{m}(f) = \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\tilde{m} = \int_X f dm = m(f)$ .  $f \in H^p(m)$  に対して  $\hat{f}(\varphi) = \int f d\varphi$  ( $\forall \varphi \in P(m)$ ) とおく.

「定理 (Wermer)  $P(m) \cong \{m\}$  とすると次の性質をもつ

inner function  $Z$  が存在する.

$$1) \quad Z H^2(m) = H_m^2, \quad H_m^2 = \{f \in H^2(m); \int f dm = 0\}.$$

2)  $\hat{Z}$  は  $P$  を  $\Delta = \{\lambda; |\lambda| < 1\}$  上へ 1 対 1 に写像し,  
 $\hat{Z}^{-1}$  は  $(w^*)$ -continuous である.

$$3) \quad f \in H^2(m) \text{ のとき, } \hat{f}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (\forall y \in P(m))$$

$$\lambda = \hat{Z}(y), \quad a_n = \int \bar{Z}^n f dm.$$

$Z$  についての多項式の  $L^p(m)$ -norm closure を  $\mathcal{H}^p$ ,  $Z$  と  $\bar{Z}$   
 についての多項式の  $L^p(m)$ -norm closure を  $\mathcal{L}^p$  と示す ( $p=\infty$   
 のときは  $w^*$  closure).

$$H^p = \mathcal{H}^p \oplus I^p, \quad I^p = \{f \in H^p(m); \int \bar{Z}^n f dm = 0, n=0, 1, 2, \dots\}$$

$$L^p = \mathcal{L}^p \oplus N^p, \quad N^p = \{f \in L^p(m); \int Z^n f dm = 0, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

( $\oplus$  は algebraic direct sum を示す)

$$(1.1) \quad f \in I^p \Leftrightarrow \bar{Z}^n f \in I^p (n \geq 1) \Leftrightarrow \varphi(f) = \int f d\varphi = 0 \quad (\forall \varphi \in P)$$

$N^p$  は  $I^p + \bar{I}^p$  の  $L^p(m)$  norm closure である.

$$\mathcal{H}^p \cap L^\infty = \mathcal{H}^\infty, \quad I^p \cap L^\infty = I^\infty \text{ 等々 (cf. [6])}$$

$d\theta$  は複素平面の単位円周  $|\lambda|=1$  上の normalized Lebesgue  
 measure,  $H^p(d\theta)$  は classical Hardy space とする. すると

$$(1.2) \quad T: Z \rightarrow e^{i\theta}$$

は  $\mathcal{L}^p$  から  $L^p(d\theta)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 上への isometrically isomorphism

に拡張される. この  $T$  は  $\mathcal{H}^p$  を  $H^p(d\theta)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 上に

isometrically isomorphic に与す. この際  $T\bar{f} = \overline{Tf}$ ,  
 $f \in L^p$  ( $\bar{f}$  は  $f$  の complex conjugate) である.  $p=\infty$  のと  
 きは  $T$  は  $\mathcal{H}^\infty$  (または  $L^\infty$ ) から  $H^\infty(d\sigma)$  (または  $L^\infty(d\sigma)$ ) 上  
 への algebra isomorphism である. 従って  $T$  の adjoint map  
 $T^*$  は  $\mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$  (または  $\mathcal{M}(L^\infty(d\sigma))$ ) を  $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  (または  
 $\mathcal{M}(L^\infty)$ ) に homeomorphic に与す.  $\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty$  は  $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  におけ  
 る nontrivial Gleason part であり, 容易に解さる,  $(T^*)^{-1}(\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty)$   
 $= D$ , ただし  $D$  は複素平面上の単位円板で  $D \subset \mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$   
 と考へたものである.  $\overline{D} = \mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$ ,  $(T^*)^{-1}(\overline{\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty}) = \overline{D}$   
 であるから

$$(1.3) \quad \overline{\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$$

$$(T^*)^{-1}(ch(\mathcal{H}^\infty)) = ch(H^\infty(d\sigma)) = \partial(H^\infty(d\sigma)) = \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)) \text{ から}$$

$$(1.4) \quad ch(\mathcal{H}^\infty) = \partial(\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{M}(L^\infty).$$

(uniform algebra  $A$  の choquet boundary  $\subset ch A$ , Silov  
 boundary  $\subset \partial A$  を示す.) 次の事柄も容易に解さる.

$$(1.5) \quad \partial\mathcal{H}^\infty = \{ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty); |\varphi(h)|=1 \text{ for every inner function } h \text{ in } \mathcal{H}^\infty \}$$

$$(1.6) \quad \mathcal{L}_R^\infty = \log |(\mathcal{H}^\infty)^{-1}|, \quad C_R(\mathcal{M}(L^\infty)) = \log |(\tilde{\mathcal{H}}^\infty)^{-1}|$$

§3.  $H^\infty(m)$ ,  $\mathcal{M}(H^\infty(m))$  のある性質

補題 3.1  $L^\infty \cdot I^\infty = I^\infty$

証明  $f \in I^\infty$  のとき  $\bar{Z}^n f \in I^\infty$  ( $n \geq 1$ ).  $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathcal{H}^2$

$\therefore$  対して  $\int |f\bar{g} - \sum_{n=0}^k \bar{a}_n Z^n f|^2 dm \leq \|f\|_{H^\infty}^2 \int |g - \sum_{n=0}^k a_n Z^n|^2 dm \rightarrow 0$   
 $(k \rightarrow \infty)$ .  $\therefore \overline{\mathcal{H}^2} \cdot I^\infty \subseteq I^2$ . また  $\mathcal{H}_m^2 \cdot I^\infty \subseteq I^2$  であるから  
 $\mathcal{L}^2 \cdot I^\infty \subseteq I^2$  ( $\because \mathcal{L}^2 = \overline{\mathcal{H}^2} \oplus \mathcal{H}_m^2$ )  $\therefore \mathcal{L}^\infty \cdot I^\infty \subseteq I^\infty$   
 $\therefore \mathcal{L}^\infty I^\infty = I^\infty$ . Q.E.D.

定理 A. 1)  $H^\infty/I^\infty$  と  $\mathcal{H}^\infty$  は Banach algebra として  
 同型である ( $H^\infty/I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty$ ).

2)  $\text{hull } I^\infty = \mathcal{J}_0 = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  (同一表現を来す), また  
 $\hat{\mathcal{H}}^\infty \subset \hat{H}^\infty(\text{cm})$  と  $\mathcal{H}^\infty|_{\mathcal{J}_0}$  は  $\mathcal{C}(\mathcal{J}_0)$  の uniform  
 algebra である.  $\text{ch}(\mathcal{H}^\infty|_{\mathcal{J}_0}) = \partial(\mathcal{H}^\infty|_{\mathcal{J}_0}) = \{g \in \mathcal{J}_0; |g(h)|=1$   
 for every inner function  $h$  in  $\mathcal{H}^\infty\} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$  ( $= \tilde{\gamma}$  とおく),  
 $C_R(\tilde{\gamma}) = \log |(\hat{\mathcal{H}}^\infty)^{-1}| \tilde{\gamma}|$  また  $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)|_{\mathcal{L}^\infty}$ , 従って  $\tilde{x}$   
 $(\in \tilde{X} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty))$  に  $\tilde{x}|_{\mathcal{L}^\infty}$  と対応する写像  $\tilde{x}$  と  $\pi$  とする  
 と,  $\pi$  は  $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$  から  $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$  上への連続写像である.

3)  $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty) - \mathcal{J}_0 \ni \varphi$  ならば  $\varphi|_{\mathcal{H}^\infty} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$  である.

証明. 1)  $\forall f \in H^\infty(\text{cm})$ ,  $f = g + h$  ( $g \in \mathcal{H}^\infty$ ,  $h \in I^\infty$ ) とす  
 ると, Lemma 3.1 から  $f^n = g^n + h_n$ ,  $g^n \in \mathcal{H}^\infty$ ,  $h_n \in I^\infty$ .  
 $\therefore \int |f|^{2n} dm = \int |g|^{2n} dm + \int |h_n|^2 dm \geq \int |g|^{2n} dm$   
 $\therefore (\int |f|^{2n} dm)^{1/2n} \geq (\int |g|^{2n} dm)^{1/2n}$ .  $n \rightarrow \infty$  すると  $\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty$ .  
 従って  $H^\infty$  から  $H^\infty/I^\infty$  の上への自然写像  $\pi$  によって,  $f \in \mathcal{H}^\infty$   
 $\pi f = g + I^\infty \in H^\infty/I^\infty$  が対応したとすると,

$$\|\bar{g}\|_\infty = \inf \{ \|g+h\|_\infty ; h \in I^\infty \} = \|g\|_\infty$$

$$H^\infty = \mathcal{H}^\infty \oplus I^\infty \text{ であるから } H^\infty / I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty.$$

2)  $H^\infty / I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty$ ,  $\mathcal{M}(H^\infty / I^\infty) = \text{hull } I^\infty = \{ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) ; \varphi(h) = 0 \text{ for all } h \in I^\infty \}$  から  $\text{hull } I^\infty = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ .  $\varphi \in \text{hull } I^\infty$  から  $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  上への homeomorphic  $\Sigma$  mapping  $\Sigma$  が存在するのだから  $\bar{g} / \mathcal{H}^\infty = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  ((1.3)式) であるから  $\bar{g} \subseteq \text{hull } I^\infty$  であるから  $\bar{g} = \Sigma^{-1}(\bar{g} / \mathcal{H}^\infty) = \Sigma^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ ,  $\therefore \bar{g} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ .

( $\exists \varphi \in \text{hull } I^\infty$ ,  $\Sigma \varphi = \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$  とする  $\varphi$  は  $\Phi(g) = \varphi(g)$  for  $\forall g \in \mathcal{H}^\infty$ ). 従って  $\hat{\mathcal{H}}^\infty \subset \hat{H}^\infty(\text{on } \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty))$  と  $\hat{\mathcal{H}}^\infty$  は  $\hat{\mathcal{H}}^\infty|_{\bar{g}}$  と  $\mathcal{H}^\infty$  の Gelfand 表現  $\hat{\mathcal{H}}^\infty$  (on  $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ ) とは同一のものである。故に  $\hat{\mathcal{H}}^\infty|_{\bar{g}}$  は  $C(\bar{g})$  の uniform algebra である。

(1.4), (1.5) 式から  $\text{ch}(\hat{\mathcal{H}}^\infty|_{\bar{g}}) = \partial(\hat{\mathcal{H}}^\infty|_{\bar{g}}) = \{ \varphi \in \bar{g} ; |\varphi(h)| = 1 \text{ for all inner function } h \text{ on } \mathcal{H}^\infty \} = \Sigma^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ , (1.6) 式から  $\rho(\tilde{\gamma}) = \log |\hat{\mathcal{H}}^\infty|_{\bar{g}}|$ . 故に  $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)|_{\mathcal{L}^\infty}$  を示す。  $\mathcal{L}^\infty$  は  $\mathcal{L}^\infty$  の  $\mathcal{L}^\infty$  への embedding mapping,  $\mathcal{E}^*$  は  $\mathcal{E}$  の adjoint mapping とする。  $\mathcal{E}^*$  は  $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \{ \varphi \in (\mathcal{L}^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1 \}$  と  $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \{ \varphi \in (\mathcal{L}^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1 \}$  上への map する (Hahn Banach theorem を使う) ことを

$$\mathcal{E}^* \text{ ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} \supseteq \text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} \quad ([1], \text{ p. 318})$$

Bauer の定理 ([1], p. 315) によつて  $\text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ ,  $\text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ . 故に  $\mathcal{E}^* \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ .

$\therefore \mathcal{M}(L^\infty)/L^\infty \supseteq \mathcal{M}(L^\infty)$ . また  $\mathcal{M}(L^\infty)/L^\infty \subseteq \mathcal{M}(L^\infty)$  が成り立つから  $\mathcal{M}(L^\infty)/L^\infty = \mathcal{M}(L^\infty)$ .

3)  $\forall \varphi \in \mathcal{M}(I^\infty)$  に対して  $\varphi(h) = 1$  ( $\exists h \in I^\infty$ ).  $\therefore \Phi(\varphi) = \varphi(fh)$  ( $\forall f \in H^\infty$ ) とおくと  $\Phi(1) = 1$  と  $\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$  ( $\forall \varphi, \psi \in H^\infty$ )  
 $\therefore \Phi \in \mathcal{M}(H^\infty(I^\infty)) - \mathcal{I}$ . 対応  $\varphi \rightarrow \Phi$  により  $\mathcal{M}(I^\infty) \cong \mathcal{M}(H^\infty) - \mathcal{I}$  とは homeomorphic になり,  $L^\infty, I^\infty = I^\infty$  (補題 3.1) であるから  $\forall f, g \in L^\infty$  に対して  $\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$ . 即ち  $\Phi|_{\mathcal{H}^\infty} \in \mathcal{M}(L^\infty)$  となる ( $\Phi|_{\mathcal{H}^\infty}$  は  $\mathcal{M}(L^\infty)$  に拡張される).

補題 3.2.  $C$  は Banach space,  $S, T \subseteq C^*$  の  $w^*$  closed subspace とする. 若しある定数  $k(>0)$  が存在して

$$\|u\| + \|v\| \leq k \|u+v\| \quad (\forall u \in S, \forall v \in T)$$

とすると  $S+T$  は  $C^*$  の  $w^*$  closed subspace である.

(例として, G. M. Leibowicz: Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman, p. 203 を参照.)

定理 B.  $I^\infty \neq \{0\}$  のとき,  $\mathcal{M}(I^\infty)$  は disconnected である.

証明.  $\therefore L^\infty \oplus I^\infty = B$  とおく. このとき  $B \ni \forall f$   
 $f = g + h$  ( $g \in L^\infty, h \in I^\infty$ ) に対して定理 A-1) の証明と同様に  $\|g\| \leq \|f\|$ , 従って  $\|h\| \leq 2\|f\|$   $\therefore \|g\| + \|h\| \leq 3\|f\|$  が得られ, 補題 3.2 から  $B$  は  $w^*$  closed 従って



Banach algebra になる. また  $B/I^\infty \subset L^\infty$  は Banach algebra として同型である. よって  $M(L^\infty) = \text{hull}(I^\infty)$  で  $M(B) - \text{hull } I^\infty$  と  $M(I^\infty)$  とは homeomorphic である.

$H^\infty(m)$  に属する inner function  $f$  を

$$(3.1) \quad f = g + h \quad (g \in H^\infty, h \in I^\infty), \quad h \neq 0$$

とあるものが存在する. (  $\because$  ) 若し存在しなければ, [2] によって  $L^\infty = L^\infty$  となり,  $I^\infty \equiv \{0\}$  に反する). このとき,

$$\left( \int |g| dm \right)^2 \leq \int |g|^2 dm < \int |g|^2 dm + \int |h|^2 dm = 1$$

より  $\int |g| dm < 1$ . また  $|g| \leq |g|_\infty \leq \|f\|_\infty = 1$ . この関係も  $\tilde{X}$  に移すと,

$\int |\tilde{g}| d\tilde{m} < 1$  で  $|\tilde{g}| \leq 1$ . 従って

$\tilde{E} = \{ \tilde{x} \in \tilde{X}; |\tilde{g}(\tilde{x})| < 1 \}$  は空集合ではない.  $\forall \tilde{x} \in \tilde{E}$

に就いて  $\pi \tilde{x} = \varphi \in M(L^\infty)$  とおくと,  $M(L^\infty) = \text{hull } I^\infty$  であるから

$\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$  で  $|\varphi(f)| < 1$ .  $\{ \varphi; \varphi \in M(L^\infty)$

,  $|\varphi(f)| < 1 \} = U$  とおくと,  $U$  は  $M(L^\infty)$  上の空でない

open set である. また  $U$  の任意の要素  $\varphi$  に対し,  $\pi \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{x}$

とすると,  $\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$  から  $|\tilde{x}(g)| < 1$ . 故に

$|\tilde{x}(h)| \geq |\tilde{x}(f)| - |\tilde{x}(g)| = 1 - |\tilde{x}(g)| > 0$  となり  $\tilde{x} \notin M(L^\infty)$ .

$\therefore \pi^{-1}U \cap M(L^\infty) = \emptyset$ . また  $U \neq V$  なる clopen

set  $V$  がとれる. ( $\because$  )  $M(L^\infty)$  と  $M(L^\infty(\mathbb{D}))$  とは

homeomorphic であるから) そうすると,  $\chi^2 = \chi \in L^\infty$

なる関数  $\chi$  が存在して

$V = \{g \in M(L^\infty) : g(X) = 1\}$  " " ,  $X_1 = \{g \in M(B) : g(X) = 1\}$ ,  $X_2 = \{g \in M(B) : g(X) = 0\}$  とおくと,  $X_1, X_2$  はそれぞれ  $M(B)$  における  $\hat{X} = \hat{X}$  " closed set "

$$M(B) = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \hat{X}.$$

$$M(B) - M(L^\infty) = (X_1 - M(L^\infty)) \cup (X_2 - M(L^\infty)).$$

$M(B) - M(L^\infty)$  から  $M(I^\infty)$  への homeomorphic map によって

$$M(I^\infty) = Y_1 \cup Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = \hat{X}, \quad Y_1, Y_2 \text{ は共に "open set",}$$

従って,  $M(I^\infty)$  は disconnected である. Q. E. D.

§4.  $H^\infty(m)$  の  $w^*$  maximality について.

定理 C. 次の事柄は同値である.

- 1)  $H^\infty(m)$  は  $L^\infty(m)$  の  $w^*$  closed subalgebra として maximal である.
- 2)  $H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty$ .
- 3)  $f \in H^\infty(m)$ ,  $\hat{f}(q) = 0$  for all  $q$  in  $P(m) \Rightarrow f \equiv 0$  a.e. (m).
- 4)  $\int \log |f| dm > -\infty$  for all  $f \in H^\infty(m)$ ,  $f \neq 0$ .
- 5)  $f \in H^\infty(m)$ ,  $f \neq 0$  ならば  $f$  は outer function  $g$  と inner function  $h$  の積に分解される.

証明. 1)  $\Leftrightarrow$  2)  $\Leftrightarrow$  3) は [5], [6] による.

1)  $\Rightarrow$  2); 若し  $L^\infty \neq \{0\}$  ならば  $H^\infty(m) \subsetneq B \subsetneq L^\infty(m)$

なる  $w^*$ -closed  $\mathfrak{A}$ -subalgebra が存在する (例には, 定理 B の証明の中の  $B = L^\infty \oplus I^\infty$ ). 対偶をとればよい.

2)  $\Rightarrow$  1);  $H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty \Leftrightarrow I^\infty = \{0\}$ . 故に  $L^\infty(m) = L^\infty$ ,  $TH^\infty(m) = H^\infty(d\sigma)$ ,  $TL^\infty = L^\infty(d\sigma)$  (§2, (1.2) 以下参照).  
 $\rightarrow H^\infty(d\sigma)$  は  $L^\infty(d\sigma)$  の  $w^*$ -closed subalgebra として maximal である. よって 1) が従う.

2)  $\Leftrightarrow$  3);  $I^\infty = \{f \in H^\infty(m); \varphi(f) = 0 \text{ for all } \varphi \in P(m)\}$  により明らか.

2)  $\Rightarrow$  4);  $f \in H^\infty = \mathcal{H}^\infty \subset H^2 = \mathcal{H}^2$ ,  $f \neq 0$  から  
 $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n Z^n$  ( $a_{n_0} \neq 0$ ).  $\bar{Z}^{n_0} f = a_{n_0} + a_{n_0+1} Z + \dots$   
 $\therefore \int \log |f| dm = \int \log |\bar{Z}^{n_0} f| dm \geq \log \left| \int a_{n_0} dm \right| = \log |a_{n_0}| > -\infty$ .

4)  $\Rightarrow$  2); 対偶をとって, 2) でないならば,

$\exists f \in I^\infty \subset H^\infty(m)$ ,  $f \neq 0$ ,  $\int \log |f| dm = -\infty$  となることを示せばよい.  $I^\infty$  から注意の要素  $f$  をとり. 若し  $\int \log |f| dm > -\infty$  ならば  $|f| > 0$  a.e. (m). さて, 複素平面の単位円周  $K = \{ |z| = 1 \}$  上に (d $\sigma$ ) 可測な集合  $E$  で  $0 < \sigma(E) = \int_K \chi_E d\sigma < 1$  となるものをとり. (d $\sigma$  は normalized Lebesgue measure,  $\chi_E$  は  $E$  の特性関数である).  $U_E = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)), \varphi(\chi_E) = 0 \}$ ,  $U_{K \setminus E} = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)), \varphi(\chi_E) = 1 \}$  は  $\mathcal{M}(L^\infty(d\sigma))$  の nonempty closed set である.  $TH^\infty = \mathcal{K} \in L^\infty$  である (§2, (1.2) 式以下参照).

$T^*U_E = \{g; g \in M(L^\infty), g(X)=0\}$ ,  $T^*U_{K|E} = \{g; g \in M(L^\infty), g(X)=1\}$  は  $M(L^\infty)$  の nonempty clopen set である. 定理 A, 2) の  $\Pi$  により,  $U = \Pi^{-1}(T^*U_E)$ ,  $V = \Pi^{-1}(T^*U_{K|E})$  は  $\tilde{X}$  の nonempty clopen set である.  $\tilde{X} \setminus U = V$  である. 今  $F = \chi_f$  とおくと, 補題 3.1 から  $F \in I^\infty \subset H^\infty(m)$ .

$$\tilde{F} = \begin{cases} 0 & \text{on } U \\ \tilde{f} & \text{on } \tilde{X} \setminus U \end{cases}$$

$$\therefore \int \log |F| dm = \int_{\tilde{X}} \log |\tilde{F}| dm = -\infty.$$

4)  $\Leftrightarrow$  5) は明白.

## 文献

- [1] E. Bishop and K. de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier 9 (1959).
- [2] R. G. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacific J. Math., 31 (1969).
- [3] T. W. Gamelin, Uniform algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1969).
- [4] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular

Banach algebra, Acta Math., 108 (1962).

[5] S. Merrill, Maximality of certain algebras  $H^\infty(\text{dm})$ , Math. Zeits., 106 (1968).

[6] S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspaces of  $H^p$  and  $L^p$  spaces derived from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30 (1969).